تمرین‌های فصل اول

تمرین ۱-۳- دو زیرمجموعه خاص از صفحه R^2 را در نظر بگیرید:

الف) مجموعه مثلث‌های متساوی‌الاضلاع باز

ب) مجموعه مربع‌های باز

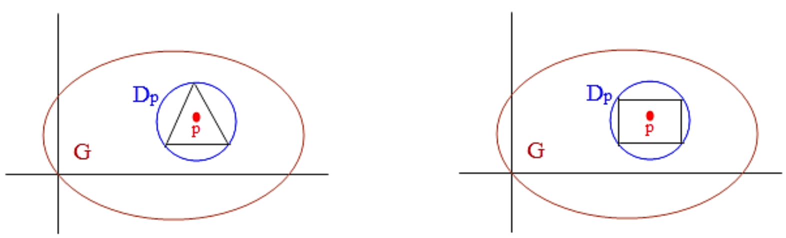
بررسی کنید که کدام‌یک از این دو مجموعه الف و ب می‌توانند پایه‌ای برای توپولوژی‌های معمول روی صفحه R^2 باشند؟

پاسخ:

هر یک از مجموعه‌های ذکر شده در عبارات الف و ب، یک پایه برای توپولوژی معمول روی صفحه R^2 محسوب می‌شوند.

اگر G یک زیرمجموعه باز از صفحه R^2 باشد و نقطه P عضوی از مجموعه G باشد. در این صورت یک دیسک باز D_p با مرکز P وجود دارد به‌گونه‌ای که: $P \in D_p \subset G$

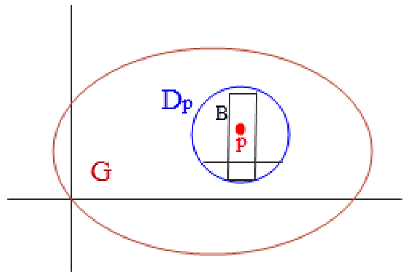
همان‌طور که در شکل زیر مشاهده می‌کنید که هر دوی مثلث‌های متساوی‌الاضلاع و مربع‌های باز می‌توانند درون یک دیسک D_p محاط شوند.



بنابراین هرکدام از مجموعه‌های ذکر شده در عبارات الف و ب، در یک تعریف خاص از پایه برای توپولوژی صدق می‌کنند. این تعریف به صورت زیر است:

اگر (X, T) یک فضای توپولوژیکی باشد، گردایه B از زیرمجموعه‌های باز X، یک پایه مانند B برای توپولوژی T محسوب می‌شود، اگر:

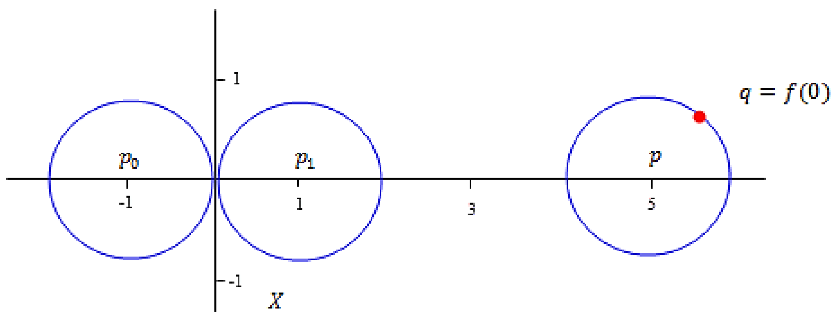
برای هر نقطه دلخواه P متعلق به یک مجموعه باز G، وجود دارد $B^* \in B$ که $p \in B^* \subset G$



تمرین ۱-۶- نشان دهید که زیرمجموعه‌های زیر از صفحه R^2، همسان نیستند.

$$X = \{\, x : d(x,p_0) = 1 \text{ یا } d(x,p_1) = 1; \quad p_0 = \langle 0,-1\rangle ,p_1 = \langle 0,1\rangle \,\}$$

$$Y = \{\, x : d(x,p) = 1 \;, \quad p = \langle 0,5\rangle \,\}$$



پاسخ:

فرض کنید که یک همسان ریخت مانند $f\colon X \to Y$ وجود داشته باشد. همچنین فرض کنید:

$.Y^* = X \setminus \{q\}$ و $X^* = X \setminus \{0\}$ و $q = f(0)$

در این صورت یک همسان ریخت مانند $f\colon X^* \to Y^*$ بین X^* و Y^* وجود دارد. می‌توان نشان داد که Y^*، هم بند است. بدین منظور اگر $q = \langle 5 + \cos\theta_0 \,, \sin\theta_0 \rangle$ باشد، تابع $g\colon (0,2\pi) \to Y^*$

با تعریف $g(\theta) = \langle 5 + \cos(\theta_0 + \theta) \,, \sin(\theta_0 + \theta)\rangle$، همسان است. چون بازه $(0,2\pi)$ هم بند است، Y^* نیز هم بند است. از طرف دیگر، مطابق تعریف مجموعه‌های H و G به فرم زیر X^* نیز هم بند نیست.

$G = \{\langle x,y\rangle : x > 0\}$ و $H = \{\langle x,y\rangle : x < 0\}$، هر دو در صفحه R^2 باز می‌باشند، بنابراین $G^* = X^* \cap G$ و $H^* = X^* \cap H$، زیرمجموعه‌های باز X^* می‌باشند. علاوه بر این، G^* و H^*، غیر تهی و غیر منفصل می‌باشند و رابطه $X^* = G^* \cup H^*$ را ارضا می‌کنند.

ازآنجایی‌که همبندی یک ویژگی توپولوژیکی است، X^* نسبت به Y^* همسان نیست و در نتیجه تابعی مانند f نمی‌تواند

وجود داشته باشد.

تمرین ۱-۸- نشان دهید که متریک معمول d روی صفحه R^2، با متریک‌های d_1 و d_2 روی صفحه R^2 هم‌ارز می‌باشند.

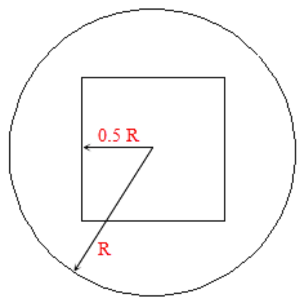
$$d_1(\mathrm{p},\mathrm{q}) = \max(|\mathrm{a}_1 - \mathrm{b}_1|, |\mathrm{a}_2 - \mathrm{b}_2|)$$

$$d_2(\mathrm{p},\mathrm{q}) = |\mathrm{a}_1 - \mathrm{b}_1| + |\mathrm{a}_2 - \mathrm{b}_2|)$$

که در آن $\mathrm{p}=(\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2)$ و $\mathrm{q}=(\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2)$، نقاط دلخواه در صفحه R^2 می‌باشند.

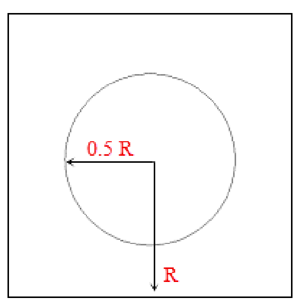
پاسخ:

با توجه به اینکه که می‌توان یک مربع را درون هر دایره مانند شکل زیر قرار داد.



همچنین می‌توان یک دایره را درون یک مربع مانند شکل زیر قرار داد.

نقاط درون یک دایره، یک کره متریک باز (d) و نقاط درون یک مربع، یک کره متریک باز (d_1) را شکل می‌دهند، در نتیجه متریک‌های d و d_1 طبق قضیه زیر هم‌ارز می‌باشند.

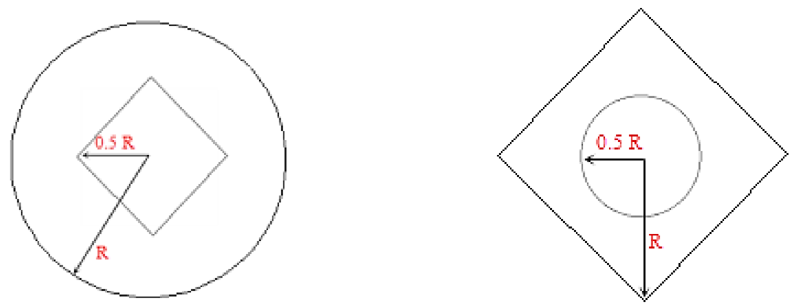


قضیه: فرض کنید d و e متریک‌هایی روی مجموعه X باشند، به‌گونه‌ای که برای هر کره متریک باز S_d با مرکز p، (p عضوی از X است)، یک کره متریک باز S_e با مرکز p وجود داشته باشد، به‌گونه‌ای که $S_e \subset S_d$ باشد و برای هر کره متریک باز S_e^* با مرکز p، یک کره متریک باز S_d^* وجود داشته باشد که رابطه روبرو بین آن‌ها برقرار باشد: $S_d^* \subset S_e^*$.

در این صورت d و e متریک‌های هم‌ارز می‌باشند که توپولوژی‌های یکسانی را روی X ایجاد می‌کنند.

علاوه بر این، می‌توان یک لوزی را درون هر دایره و همچنین عکس آن، مانند شکل زیر قرار دارد. چون نقاط درون یک

لوزی یک کره متریک باز d_2 را شکل می‌دهند، طبق قضیه ذکر شده، متریک‌های d و d_2 با هم، هم‌ارز می‌باشند.

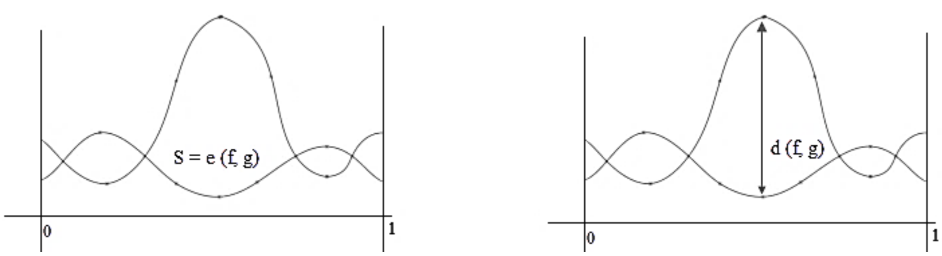


تمرین ۱-۹- اگر C[0,1] گردایه ای از تمامی توابع پیوسته حقیقی قابل تعریف روی بازه I=[0,1] باشد، متریک‌های d و e را روی C[0,1] در نظر بگیرید:

$$d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in I\}$$

$$e(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$$

$e(f,g)$، مساحت ناحیه‌ای است که طبق شکل زیر نشان داده شده است و $d(f,g)$، بزرگ‌ترین فاصله عمودی بین توابع f و g است که در شکل زیر نشان داده شده است.



نشان دهید که توپولوژی ایجاد شده توسط متریک d، که با T_d نشان داده می‌شود، درشت‌تر از توپولوژی T_e ایجاد شده توسط متریک e نیست. به عبارت دیگر نشان دهید: $T_d \not\subset T_e$

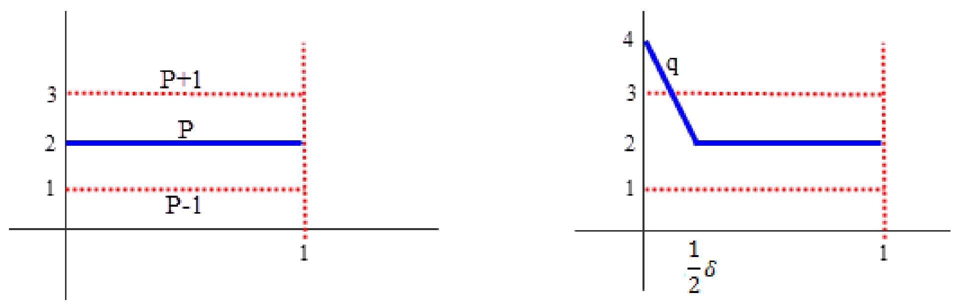
پاسخ:

اگر p یک تابع ثابت p(x)=2 باشد و $\epsilon = 1$. سپس کره $S_d(p,\epsilon)$، شامل تمامی نواحی از توابع g است که بین توابع P – 1 و P + 1 قرار دارند به‌گونه‌ای که برای تمام $x \epsilon I$ محدوده تابع g(x) به صورت روبرو باشد: $1 < g(x) < 3$.

حال باید نشان داد که کره $S_d(p,\epsilon)$ هیچ کره باز (e-open) با مرکز p را شامل نمی‌شود. برای مثال برای هر $\delta > 0$، داریم: $S_e(p,\delta) \not\subset S_d(p,\epsilon)$ برای هر $\delta > 0$، تابع q شامل پاره‌خط‌هایی بین نقاط (0,4) و $(\frac{1}{2}\delta, 2)$ و بین نقاط (1,2) و $(\frac{1}{2}\delta, 2)$ است که به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{-4x}{\delta}+4 & ,0\le x<\dfrac{1}{2}\delta\\ 2 & ,\dfrac{1}{2}\delta\le x\le 1\end{cases}$$

در شکل زیر مشاهده می‌کنید که سطح بین p و q برابر با $\frac{1}{2}\delta$ است. برای مثال $e(p,q)=\frac{1}{2}\delta$. پس $q\in S_e(p,q)$. ولی در واقع $d(p,q)=2$ و در نتیجه $q\notin S_e(p,q)$. در این صورت، برای هر $\delta>0$ داریم: $S_e(p,\delta)\not\subset S_d(p,\epsilon)$، بنابراین $T_d\not\subset T_e$



تمرین ۱-۱۰- فرض کنید که ||...|| به معنای نرم اقلیدسی و d متریک اقلیدسی القایی روی صفحه R^2 باشد. تابع e را به صورت زیر در نظر بگیرید:

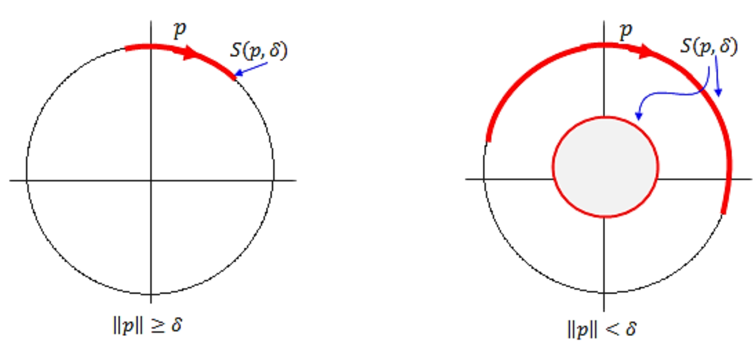
$$e(p,q)=\begin{cases}\|p\|+\|q\| & , \quad \text{اگر}\ \|p\|\neq\|q\|\\ d(p,q) & , \quad \text{اگر}\ \|p\|=\|q\|\end{cases}$$

یک کره باز در فضای متریک (R^2,e) تعریف کنید.

پاسخ:

اگر $\|p\|\ge\delta$ باشد، در این صورت $S(p,\delta)$، کمانی از دایره $\{x: \|x\|=\|p\|\}$ است.

اگر $\|p\|<\delta$ باشد، در این صورت $S(p,\delta)$ شامل نقاط درونی دایره $\{x: \|x\|=\delta-\|p\|\}$ و نقاط روی کمان دایره $\{x: \|x\|=\|p\|\}$ است.



تمرین ۱-۱۱- فرض کنید A یک زیرمجموعه از یک فضای توپولوژیکی (X, T) باشد، ثابت کنید عبارات الف و ب با هم هم‌ارز می‌باشند.

الف) A نسبت به توپولوژی T فشرده است.

ب) A نسبت به زیرفضای T_A از A، فشرده است.

پاسخ:

ابتدا از عبارت الف به عبارت ب می‌رسیم:

اگر $\{G_i\}$ یک پوشش باز T_A از A باشد. با توجه به تعریف زیرفضای توپولوژی داریم:

$$\exists\, H_i \in T$$

به‌گونه‌ای که $G_i = A \cap H_i \subset H_i$ ، بنابراین داریم: $A \subset \cup_i G_i \subset \cup_i H_i$

در نتیجه $\{H_i\}$ یک پوشش باز T از A است.

با در نظر گرفتن عبارت الف، A نسبت به توپولوژی T، فشرده است، بنابراین $\{H_i\}$ شامل یک پوشش باز کران‌دار است:

$$A \subset H_{i_1} \cup \ldots \cup H_{i_m}\ ,\ \ H_{i_k} \in \{H_i\}$$

در این صورت:

$$A \subset A \cap (H_{i_1} \bigcup \ldots \cup H_{i_m}) = (A \cap H_{i_1}) \bigcup \ldots \bigcup (A \cap H_{i_m}) = G_{i_1} \cup \ldots \cup G_{i_m}$$

بدین ترتیب $\{G_i\}$ شامل یک زیر پوشش باز کران‌دار $\{G_{i_1}, \ldots, G_{i_m}\}$ است و (A, T_A) فشرده است. حال از عبارت ب به عبارت الف می رسیم:

اگر $\{H_i\}$ یک پوشش باز T از A و $G_i = A \cap H_i$ باشد، داریم:

$$A \subset \cup_i H_i \implies A \subset A \cap (\cup_i H_i) = \cup_i (A \cap H_i) = \cup_i G_i$$

اما $G_i \in T_A$ است، بنابراین $\{G_i\}$ یک پوشش باز T_A از A است.

با در نظر گرفتن عبارت ب، A نسبت به زیرفضای T_A، فشرده است، بدین ترتیب، $\{G_i\}$ شامل یک زیرپوشش کران‌دار $\{G_{i_1}, \ldots, G_{i_m}\}$ است. بر این اساس داریم:

$$A \subset G_{i_1} \cup \ldots \cup G_{i_m} = (A \cap H_{i_1}) \cup \ldots \cup (A \cap H_{i_m})$$
$$= A \cap (H_{i_1} \cup \ldots \cup H_{i_m}) \subset H_{i_1} \cup \ldots \cup H_{i_m}$$

در نتیجه $\{H_i\}$، قابل ساده شدن به یک پوشش کران‌دار $\{H_{i_1}, \dots, H_{i_m}\}$ است. در نتیجه A نسبت به توپولوژی T فشرده است.

تمرین ۱-۱۲- ثابت کنید که هر دو بازه باز غیر تهی (a, b) و (c, d) نسبت به هم همسان هستند.

راهنمایی) از قضیه زیر استفاده کنید:

اگر $(X,T) \cong (Y,T_1)$ و $(Y,T_1) \cong (Z,T_2)$ باشند. آنگاه داریم: $(X,T) \cong (Z,T_2)$

توجه داشته باشید که تمامی بازه‌های باز در مجموعه اعداد حقیقی R نسبت به هم همسان می‌باشند و طول یک ویژگی توپولوژیکی نیست. به طور خاص، یک بازه باز با طول محدود، به عنوان مثال بازه (0,1) نسبت به یک بازه با طول نامحدود مانند $(-\infty,1)$ همسان است. در واقع تمامی بازه‌های باز نسبت به R همسان هستند.

پاسخ:

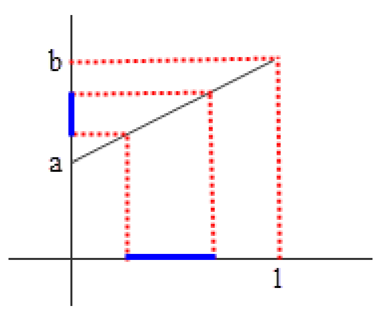
با توجه به توضیحات بالا، برای اثبات کافی است نشان داد که بازه (a, b) نسبت به (0, 1)، و بازه (c, d) نسبت به (0, 1)، همسان است.

برای اثبات این‌که (a, b) نسبت به (0, 1) همسان است، کافی است که یک همسان ریخت بین آن‌ها پیدا کنیم:

$$f:(0,1) \to (a,b)$$

اگر $a,b \in R$ باشند به‌گونه‌ای که $a < b$ باشد، تابع $f:(0,1) \to (a,b)$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$f(x) = a\,(1-x) + bx$$



همان‌طور که مشخص است تابع $f:(0,1) \to (a,b)$، یک‌به‌یک و پوشا است. همچنین از شکل بالا مشخص است که تصویر هر بازه باز درون (0,1) تحت تابع f، یک بازه باز درون (a, b) نیز است:

$$f\left(\text{(0,1) بازه باز درون}\right) = \text{یک بازه باز درون } (a,b)$$

همچنین هر مجموعه باز درون (0, 1)، اجتماعی از بازه‌های باز درون بازه (0, 1) می‌باشند، بنابراین داریم:

$$f\left((0,1)\ \text{مجموعه باز درون}\right) = f\left((0,1)\ \text{اجتماع بازه های باز درون}\right)$$

$$= (a,b)\ \text{اجتماع بازه های باز درون}$$

$$= (a,b)\ \text{مجموعه باز درون}$$

با توجه به این‌که یکی از ویژگی‌های نگاشت $f: X \to Y$ که بین دو فضای توپولوژیکی همسان (X, T) و (Y, T_1) وجود دارد، این است که: برای هر $V \in T$، وجود دارد $f(V) \in T_1$

این ویژگی از نگاشت، ارضا شده است.

به طور مشابه می‌توان نشان داد که :

$$f^{-1}\left((a,b)\ \text{مجموعه باز درون}\right) = (a,b)\ \text{یک مجموعه باز درون}$$

در نتیجه یکی دیگر از ویژگی‌های نگاشت $f: X \to Y$ بین دو فضای توپولوژیکی همسان (X, T) و (Y, T_1) ، که به صورت روبرو است: برای هر $U \in T_1$، وجود دارد $f^{-1}(U) \in T$

نیز ارضا شده است.

بنابراین نگاشت f، یک همسان ریخت است و برای تمامی $a, b \in R$ با شرط $a < b$ داریم:

$$(0,1) \cong (a,b)$$

از عبارت بالا نتیجه می‌شود: $(a,b) \cong (c,d)$

تمرین‌های فصل دوم

تمرین ۲-۱- ظرفی استوانه‌ای شکل با سطح مقطع دایروی که بالای آن باز است از ورقی با سطح مقطع 3π مترمکعب ساخته شده است. ارتفاع و شعاع ظرف چقدر باشد تا حجم ظرف بیشینه شود.

v=1 m , r=1 m

تمرین ۲-۲- نشان دهید که مقدار بیشینه تابع f(x,y,z)=x+y+z روی کره زیر برابر a√3 است.

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

جواب-

$$g: x^2+y^2+z^2=a^2$$

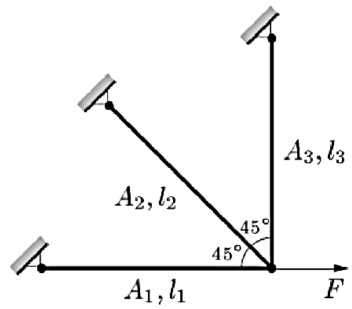
$$\nabla f=(1,1,1) \quad , \quad \nabla g=(2x,2y,2z)$$

$$\begin{cases} 1=2\lambda x \\ 1=2\lambda y \\ 1=2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2=a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2\lambda} \\ y=\dfrac{1}{2\lambda} \\ z=\dfrac{1}{2\lambda} \\ (\dfrac{1}{2\lambda})^2+(\dfrac{1}{2\lambda})^2+(\dfrac{1}{2\lambda})^2=a^2 \end{cases}$$

$$3(\frac{1}{2\lambda})^2=a^2 \Rightarrow \lambda=\pm\frac{\sqrt{3}}{2a} \Rightarrow x=y=z=\pm\frac{a}{\sqrt{3}}$$

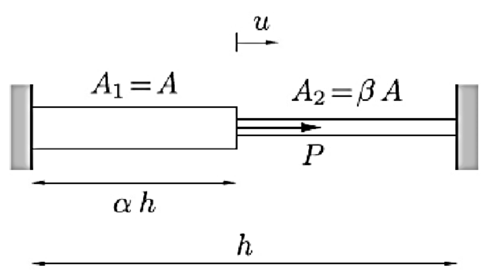
$$f\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{a}{\sqrt{3}}\right)=a\sqrt{3}$$

تمرین ۲-۳- اگر طول میله دوم در مثال ۶ تغییر کند، بهینه‌سازی توپولوژی خرپا نیز تغییر می‌کند. مساحت بهینه برای میله دوم به ازای $l_2 \geq L$ و $\beta=1,\ \rho_i=\rho_0,\ \sigma^{max}_i=\sigma_0,\ i=1,2,3$ صفر می‌شود. این نتایج را به ازای یک حالت خاص، مثلاً $l_2=\sqrt{2}L$ اثبات کنید.



$F>0$, $A1 = A3$ $l_1 = L$, $l_2 = \sqrt{2}\,L$, $l_3 = L/\beta$, $\beta=1$, $\rho_i=\rho_0$ $\sigma_i^{max}=\sigma_0$, $i=1,2,3$. شکل (۱-۲۱) خرپای سه عضوی تحت قید تنش

تمرین ۲-۴- بیشینه سفتی خرپای دو عضوی شکل زیر که تحت بار $P>0$ قرار دارد را ضمن اینکه جابجایی گره آزاد u کمینه شود به دست آورید.



شکل (۱-۲۲) خرپای دو عضوی یک‌بعدی

مدول یانگ برای هر دو میله E است و حجم خرپا نباید از مقدار V_0 تجاوز کند. مجموع طول میله‌ها h و طول میله ۱ αh است که α عددی بین α_{min} و α_{max} است. سطح مقطع میله‌ها $A_1=A$ و $A_2=\beta A$ است که β عدد است. متغیرهای طراحی α و β است.

از آنجایی که α شکل خرپا را تعیین می‌کند و β سطح مقطع میله۲، مسئله به صورت ترکیبی از بهینه‌سازی شکل و اندازه حل خواهد شد.

الف) نشان دهید مسئله می‌تواند به صورت یک مسئله برنامه‌نویسی ریاضی فرمول‌بندی شود.

$$\begin{cases} \min\limits_{\alpha,\beta} \quad \dfrac{\alpha(1-\alpha)}{1-\alpha+\alpha\beta} \\ s.t. \begin{cases} g_1 = \alpha + (1-\alpha)\beta - \dfrac{V_0}{Ah} \le 0 \\ \alpha_{min} \le \alpha \le \alpha_{max}, \quad \beta \ge 0 \end{cases} \end{cases} \qquad (۱-۱)$$

مقدار $V_0/(Ah)=1$ و $\alpha_{max}=1$ است، نشان دهید:

$$\{(\alpha,\beta):g_1\leq 0,\ \alpha_{min}\leq\alpha\leq 1,\ \beta\geq 0\}=\{(\alpha,\beta):\ \alpha_{min}\leq\alpha\leq 1,\ 0\leq\beta\leq 1\}U\{(\alpha,\beta):\alpha=1,\beta>1\}$$

مسئله را به ازای مقدار دلخواه α_{min} حل کنید.

ب) مقدار $V_0/(Ah)=1.2$ و $\alpha_{min}=0.2$ قرار داده و مسئله را به ازای مقدار $\alpha_{max}=0.6$ و $\alpha_{max}=0.8$ حل کنید.

جواب نهایی-

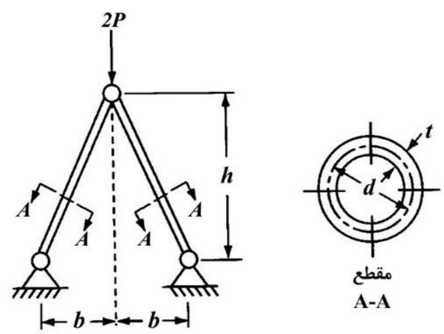
قراردادی. $\alpha^*=0,\ \beta^*\leq V_0/Ah$, و $\alpha^*=1,\ \beta^*\geq 0$

$\alpha_{max}=0.6$: $\alpha^*=0.2$, $\beta^*=1.25$, $\alpha_{max}=0.8$: $\alpha^*=0.8$, $\beta^*=2$

تمرین ۲-۵- خرپای دو عضوی شکل زیر تحت بار عمودی 2P قرار گرفته است. عضوهای آن مقطع دایروی با قطر میانگین d و ضخامت دیواره t است. حداکثر تنش مجاز در هر یک از عضوها ۴۰۰هزار پاسکال می‌باشد. مقادیر h و d را با روش هندسی به‌گونه‌ای محاسبه کنید که وزن خرپا کمینه شود. P=150,000 N

$t=.1$ in, $b=30$ in, $\sigma_0=60{,}000$ psi, $\rho=0.31$ Ib/in^3

$t=2.5$ cm, $b=77$ cm, $\sigma_0=400$ N/mm^2, $\rho=8600$ Kg/m^3



شکل (۱-۲۳) خرپای دو عضوی تحت بارگذاری

جواب-تابع هدف برابر است با:

$$f(d,h)=2\rho\pi dt\sqrt{b^2+h^2}=162.1\,d\sqrt{0.49+h^2}$$

قید خرپا به گونه زیر می‌باشد:

$$\sigma=\frac{P}{\pi dt}\frac{\sqrt{0.49+h^2}}{h}\leq\sigma_0$$

$$9.55\frac{\sqrt{0.49+h^2}}{dh}\leq 1$$

مشخص است که تابع بالا چندجمله ای نیست، بنابراین از متغیر جایگزین $y=\sqrt{0.49+h^2}$ استفاده می‌گردد. قید جدید برابر است با:

$$\frac{0.49+h^2}{y^2}\leq 1$$

$x_1=y$، $x_2=h$ و $x_3=d$. با کمینه کردن مقدار $f=162.1\,yd$

$$9.55yh^{-1}d^{-1}\leq 1$$

$$0.49y^{-2}+y^{-2}h^2\leq 1$$

محاسبه بیشینه رابطه زیر:

$$v(\lambda_{01},\lambda_{11},\lambda_{21},\lambda_{22})=\left(\frac{162.1}{\lambda_{01}}\right)^{\lambda_{01}}\left(\frac{1.75}{\lambda_{11}}\right)^{\lambda_{11}}\left(\frac{0.49}{\lambda_{21}}\right)^{\lambda_{21}}\left(\frac{1}{\lambda_{22}}\right)^{\lambda_{22}}(\lambda_{21}+\lambda_{22})^{\lambda_{21}+\lambda_{22}}$$

$$\lambda_{01}=1$$

$$\lambda_{01}+\lambda_{11}-2\lambda_{21}-2\lambda_{22}=0$$

$$-\lambda_{11}+2\lambda_{22}=0$$

$$\lambda_{01}-\lambda_{11}=0$$

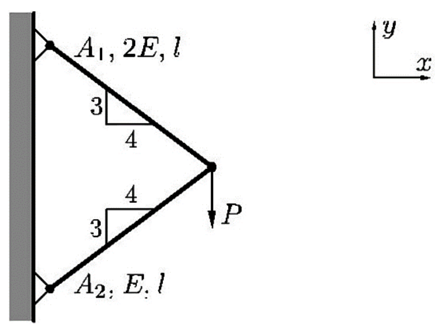
$$y^*=277.2, h^*=77cm, d^*=6.3\ cm$$

تمرین‌های فصل سوم

*تمرین ۳-۱- خرپای دو عضوی نشان داده شده در شکل ۳-۳۴ تحت بارگذاری P>0 قرار گرفته است. کمینه مقدار $-Pu_y$ که u_y جابجایی عمودی گره آزاد است را محاسبه کنید. حجم خرپا از مقدار V_0 تجاوز نمی‌کند و تنش اعضای خرپا نباید از مقدار $(5\alpha Pl)/(6V_0)$ (پارامتر بی‌بعد $\alpha>0$) بیشتر شود. متغیرهای طراحی سطح مقطع تیرها A_1 و A_2 است.

الف) فرمول‌بندی مسئله را مطابق مسئله برنامه‌نویسی ریاضی انجام دهید.

ب) مسئله بهینه‌سازی را با استفاده از لاگرانژین دوگانه برای تمامی مقادیر مثبت α حل کنید.



شکل (۳-۳۴) خرپای دو عضوی تمرین ۳-۱

جواب نهایی قسمت الف-

$$\begin{cases} \min \dfrac{1}{A_1}+\dfrac{2}{A_2} \\ s.t.\begin{cases} A_1+A_2-\dfrac{V_0}{l}\le 0 \\ A_1\ge \dfrac{V_0}{\alpha l}, \qquad A_2\ge \dfrac{V_0}{\alpha l} \end{cases} \end{cases}$$

جواب نهایی قسمت ب- در صورتی که $0<\alpha<2$ باشد مسئله جوابی ندارد.

اگر $2\le\alpha\le\sqrt{2}+1$ $A_1^*=\frac{V_0}{\alpha l}, \qquad A_2^*=(1-\frac{1}{\alpha})\frac{V_0}{l}$

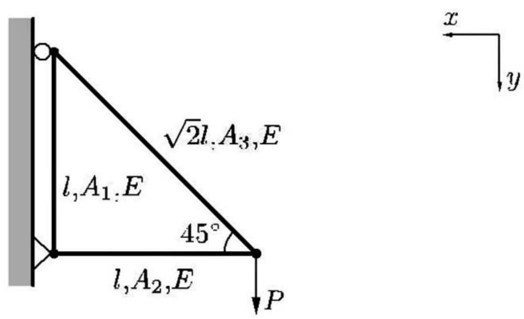
اگر $\alpha\ge\sqrt{2}+1$ $A_1^*=(\sqrt{2}-1)\frac{V_0}{l}, \qquad A_2^*=\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)\frac{V_0}{l}$

*تمرین ۳-۲- خرپای سه عضوی نشان داده شده در شکل ۳-۳۵ تحت بارگذاری $P>0$ قرار گرفته است. محاسبات را جهت بیشینه شدن سفتی با کمینه کردن مقدار Pu_y انجام دهید. u_y جابجایی عمودی گره ای است که بار P وارد شده است. حجم خرپا از مقدار V_0 تجاوز نمی‌کند. متغیرهای طراحی شامل سطح مقطع تیرهای A_1,A_2 و A_3 است.

الف) فرمول‌بندی مسئله را مطابق مسئله برنامه‌نویسی ریاضی انجام دهید.

ب) مسئله بهینه‌سازی را تحت شرایط کان-تاکر حل کنید.

ج) مسئله بهینه‌سازی را به کمک لاگرانژین دوگانه حل نمایید.



شکل (۳-۳۵) خرپای سه عضوی تمرین ۳-۲

جواب نهایی قسمت الف-

$$\begin{cases} \min \dfrac{1}{A_1}+\dfrac{2}{A_2}+\dfrac{2\sqrt{2}}{A_3} \\ s.t. \begin{cases} A_1+A_2+\sqrt{2}A_3-\dfrac{V_0}{l}\le 0 \\ A_1,A_2,A_3\ge 0 \end{cases} \end{cases}$$

جواب نهایی قسمت ب-

$$A_1^*,A_2^*=\frac{1}{4}\frac{V_0}{l},\qquad A_3^*=\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{V_0}{l}$$

تمرین ۳-۳- مسئله بهینه‌سازی تمرین قبل به گونه ای حل شود که بیشینه سفتی به ازای کمینه کردن بردار جابجایی (u^Tu) حاصل شود. با تعریف $x_i=\frac{lA_i}{V_0},\ i=1,\dots,3$ مسئله بهینه‌سازی به فرم زیر تشکیل می شود:

$$\min \frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}+\frac{4}{x_3^2}+\frac{1}{x_1x_2}+\frac{2\sqrt{2}}{x_1x_3}+\frac{2\sqrt{2}}{x_2x_3}$$

$$s.t. x_1+x_2+\sqrt{2}x_3-1\leq 0,\ \ x_1,x_2,x_3\geq 0$$

الف) نشان دهید که این مسئله کوژ است. (توجه داشته باشید که در مثال ۳-۹ مسئله ای بررسی شد که پارامتر u^Tu یک تابع غیرمحدب از متغیرهای طراحی را مشخص می کرد.)

ب) زیرمسئله‌ای را با انجام تقریب کانلین مسئله در $x_i=1, i=1,\ldots,3$ بدست آورید.

$$\begin{cases}\min(3+2\sqrt{2})(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2})+(8+4\sqrt{2})\frac{1}{x_3}\\ s.t.\quad \begin{cases}x_1+x_2+\sqrt{2}x_3-1\leq 0\\ x_1,x_2,x_3\geq 0\end{cases}\end{cases}$$

$$x_1^*=x_2^*=\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{2\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{2+2\sqrt{2}}\right)}\approx 0.26,$$

$$x_3^*=\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{2+2\sqrt{2}}}\approx 0.34$$

تمرین ۳-۴- نشان دهید اگر مجانب‌های الگوریتم MMA به صورت $L_j^k\to-\infty$ و $U_j^k\to+\infty$ انتخاب شوند، تقریب SLP حاصل می‌شود.

تمرین ۳-۵- خرپای چهارعضوی نشان داده شده در شکل ۳-۲۰ تحت بارگذاری $P>0$ قرار گرفته است. سطح مقطع تیرهای خرپا A_1,A_2,A_3 و A_4 به گونه‌ای باید محاسبه شود که جابجایی u_x^B کمینه گردد. حجم خرپا نباید از مقدار V_0 تجاوز کند.

الف) مسئله را مطابق مسئله برنامه‌نویسی ریاضی با تعریف متغیرهای طراحی جدید $x_i=lA_i/V_0,\ i=1,\ldots,4$ فرمول‌بندی شود.

ب) مقدار سطح مقطع بهینه تیر ۱ A_1* را محاسبه کنید.

$$A_1^*=0$$

ج) تقریب کانلین مسئله را در نقاط غیرعملی $x_i=1,\ i=1,\ldots,4$ بدست آورید. تقریب کانلین مسئله بهینه‌سازی را به کمک لاگرانژین دوگانه حل کنید.